Σημείωση:
Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό ορθογώνιο είναι ολοκληρώσιμη. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο με το Θ. fubini για τον υπολογισμό πολλαπλών ολοκληρωμάτων

ΠΡΟΤΑΣΗ
Αφού $f: A\times B \to \mathbb{R}$ συνεχής ($\Rightarrow f$ φραγμένη στο $A\times B$ αφού το $A\times B$ είναι συμπαγές) τότε $\forall x\in A$: $f(x,\cdot): B\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\forall y\in B$: $f(\cdot,y): A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(\forall \varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ \forall \|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \underbrace{\|(x_0,y)-(x_0,y_0)\|}_{|y-y_0|}<\delta \Rightarrow \|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x_0,\cdot)$ συνεχής στο y_0

Άρα, όλες οι ολοκληρωτικές συναρτήσεις fubini είναι συνεχείς

Παρατήρηση:
Έστω $f: [a_1,\beta_1]\times\ldots\times[a_n,\beta_n]\to\mathbb{R}$ συνεχής

$$\int_{[a_1,\beta_1]\times\ldots\times[a_n,\beta_n]} f(x_1,\ldots,x_n)\,d(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$=\int_{a_n}^{\beta_n}\Big(\int_{[a_1,\beta_1]\times\ldots\times[a_{n-1},\beta_{n-1}]} f(x_1,\ldots,x_n)\,d(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$=\int_{a_n}^{\beta_n}\Big(\int_{a_{n-1}}^{\beta_{n-1}}\ldots\Big(\int_{a_1}^{\beta_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\Big)dx_2\ldots\Big)dx_n =$$

$$\int_{a_n}^{\beta_n} dx_n \int_{a_{n-1}}^{\beta_{n-1}} dx_{n-1} \cdots\cdots \int_{a_1}^{\beta_1} dx_1 \ f(x_1, \ldots, x_n)$$

Άσκηση: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_A \frac{2z}{(x+y)^2}\, d(x,y,z) \quad \text{για } A=[1,2]\times[2,3]\times[0,2]$$

Λύση

$$\int_0^2 \int_2^3 \int_1^2 \frac{2z}{(x+y)^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 \int_2^3 2z \cdot \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^2 \int_2^3 2z \cdot \left(-\frac{1}{2+y} + \frac{1}{1+y} \right) dy\, dz =$$

$$= \int_0^2 2z \cdot \int_2^3 \left(-\frac{1}{2+y} + \frac{1}{1+y} \right) dy\, dz =$$

$$= \int_0^2 2z \cdot \Big[-\log(2+y) + \log(1+y) \Big]_2^3 \, dz =$$

$$= \int_0^2 2z \cdot (-\log 5 + \log 4 + \log 4 - \log 3)\, dz =$$

$$= (-\log 5 + 2\log 4 - \log 3) \cdot \int_0^2 2z\, dz =$$

$$= (-\log 5 + 2\log 4 - \log 3) \cdot (4-0) =$$

$$= -4\log 5 + 16\log 2 - 4\log 3.$$